ÜBER

EINIGE ALGEBRAISCHE RECIPROCITÄTS-SÄTZE

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 5. JÄNNER 1888.)

In Crelle's Journal, Bd. 69, S. 355 hat Clebsch einen merkwürdigen Reciprocitäts-Satz bewiesen, konnte aber die wichtige Combinante, die in diesem Satze als Multiplicator auftritt, nur in speciellen Fällen darstellen. Erst im Band 70, S. 175 gibt er mit einigen Modificationen eine Mittheilung des Herrn Gordan, in welcher derselbe die betreffende Combinante allgemein ableitet. Da diese Herleitung in symbolischer Form geschieht, und da ferner das Schlussresultat zu complicirt erscheint, so versuche ich im Folgenden zu einer einfacheren Gestalt der Combinante in realer Form zu gelangen. Ich folge hiebei bis zu einem gewissen Punkte den der Herleitung des Herrn Gordan zu Grunde liegenden Principien und modificire nur dieselben für reale Formen.

Was den Inhalt vorliegender Arbeit betrifft, so sind die §§. 1 und 2 dem Satze von Clebsch gewidmet die §§. 3 und 4 behandeln den Zusammenhang, der zwischen der in Rede stehenden Combinante und einigen in der Theorie der Steiner'schen Fläche auftretenden Formen besteht, und dabei zeigt es sich, dass derselbe viel enger ist, als er in den Arbeiten von Clebsch [1] und Rosanes [2] erscheint. Im §. 5 werden die sich als Analoga zu dem Satze von Clebsch repräsentirenden Reciprocitäts-Sätze des Herrn Rosanes im Band 75, S. 167 und des Herrn Frobenius im Band 77, S. 247 des genannten Journals behandelt. Die Sätze des Letzteren beziehen sich allerdings nur auf Functionen einer Variabeln, allein Herr Pasch hat im Band 80, S. 177 gezeigt, wie dieselben auf homogene Formen mehrerer Variabeln auszudehnen sind. Alle diese Sätze sind, wie ich glaube, weniger Analoga zum Satze von Clebsch, als vielmehr Verallgemeinerungen gewöhnlicher Determinanten-Sätze und in diesem Sinne werden sie auch hier behandelt. Der §. 6 ist dem interessanten und für die Geometrie wichtigen Satze des Herrn Brill in seiner Abhandlung „Über zwei Berührungsprobleme", Mathem. Annalen, Bd. 4, S. 527 gewidmet. Es wird daselbst gezeigt, dass dieser Satz eigentlich nichts weiter, als der oben erwähnte Satz des Herrn Rosanes ist. Endlich wird im §. 7 ein interessanter Satz von den Steiner'schen Curven bewiesen.

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 69, S. 357.

[2] Über Systeme von Kegelschnitten, Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 204 ff.

§. 1.

Um nun den allgemeinen Satz zu beweisen, welchen Clebsch folgendermassen formulirt:

„Es seien $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ $n+1$ homogene ganze Functionen νter Ordnung von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$; ferner $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$ die aus ihnen gebildeten Functionaldeterminanten und $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n+1}$ wieder die aus den φ gebildeten Functionaldeterminanten. Dann unterscheiden sich die ψ von den f nur um einen gemeinschaftlichen Factor M, so dass man die Gleichungen hat:

1) $$\psi_1 = M.f_1, \ \psi_2 = M.f_2, \ldots \psi_{n+1} = M.f_{n+1};\text{“}$$

um ferner den Factor M zu ermitteln, gehe ich nach dem Vorgange des Herrn Gordan von der Voraussetzung aus, dass es, da in den ψ keine höheren Differentialquotienten der f als die zweiten vorkommen, genügt, wenn man die Bildung von M unter der Annahme vornimmt, dass alle f von der zweiten Ordnung seien, und man erhält aus diesem Resultate sofort das allgemeine, wenn man darin statt der Coëfficienten der Functionen zweiter Ordnung die zweiten Differentialquotienten der f setzt. Ferner mache ich, gleichfalls nach dem Vorgange von Gordan, folgenden Ansatz. Die Functionaldeterminanten φ (dividirt durch passende Zahlen) erscheinen als die Coëfficienten der α in der Determinante

2) $$D = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_{n+1}\varphi_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Ebenso erhalten wir die Functionaldeterminanten ψ als Coëfficienten der β in der Determinante

3) $$\Delta = \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 + \ldots + \beta_{n+1}\psi_{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_n} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun die Determinanten D und Δ, so bekommt man folgende Determinante:

4) $$D\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} & \Sigma\alpha_k\beta_k \end{vmatrix}.$$

Die Determinante D verschwindet, wenn wir in ihr die α durch die f oder durch ihre nach einem x genommenen Differentialquotienten ersetzen; ebenso verschwindet die Determinante Δ, wenn man in ihr die β durch die φ oder durch ihre Differentialquotienten ersetzt, d. h. es bestehen folgende Gleichungen:

5) $$\begin{aligned} f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \cdot \quad \cdot + f_{n+1}\,\varphi_{n+1} &= 0 \\ \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \cdot \quad \cdot \quad \cdot + \varphi_{n+1}\,\psi_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

aus welchen sofort folgt, dass die ψ den f proportional sind.

Was nun den gemeinschaftlichen Factor betrifft, so kommt es nach Gordan darauf an, zu beweisen, dass einerseits die Determinante

6) $$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \\ \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

symmetrisch sei, was so viel sagen will, dass die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h} = \Sigma\frac{\partial f_k}{\partial x_h}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i},$$

und dass sie identisch verschwindet. Das erstere folgt leicht aus den Gleichungen

7) $$\begin{aligned} \Sigma\,\varphi_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 0 \\ \Sigma\,\varphi_k\frac{\partial f_k}{\partial x_h} &= 0, \end{aligned}$$

denn differenzirt man die erste dieser Gleichungen nach x_h und die zweite nach x_i und subtrahirt sie dann von einander, so erhält man

8) $$\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h} - \sum\frac{\partial f_k}{\partial x_h}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} = 0.$$

Was die zweite Behauptung betrifft, so sieht man dieselbe auf folgende Weise leicht ein. Multiplicirt man nämlich in $\mathfrak{D}$ die zweite Verticalreihe mit x_2, die dritte mit x_3 u. s. w. bis die letzte mit x_n und addirt dieselben zu der mit x_1 multiplicirten ersten, so kommen in derselben lauter Elemente vor, welche in Folge der Identitäten

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\lambda}\frac{\partial f_k}{\partial x_\iota} = \sum_{k=1}^{n+1}\varphi_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\iota} = 0$$

identisch verschwinden. Das Product $D.\Delta$ lässt sich demgemäss nach bekannten Sätzen in der Determinanten-Theorie in folgender Weise schreiben:

9) $$D.\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{2n}\frac{\partial f_k}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\Sigma\beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{n}\Sigma\alpha_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Da die α und β beliebige Grössen sind, so können wir sie so annehmen, dass folgende Gleichung besteht:

$$\Sigma \beta_k \psi_k = M \Sigma \alpha_k f_k. \tag{10}$$

Verfährt man nun hier ganz wie oben, indem man zuerst die $n$te Zeile mit x_n, die $(n-1)$te mit x_{n-1} u. s. w. multiplicirt und zu der mit x_1 multiplicirten ersten addirt, wobei in dieser alle Elemente Nullen sind, bis auf das letzte, welches gleich $\Sigma \beta_k f_k$ wird, und nachher dieselbe Operation mit den ersten Verticalreihen macht, so geht das Product über in:

$$D\Delta = (-1)^{(n-1)+(n-2)} \frac{1}{x_1^2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \\ \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2n} \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Bezeichnet man diese Determinante mit α_{11}, so folgt die Form von M:

$$M = -\frac{1}{x_1^2} \alpha_{11}, \tag{12}$$

dass α_{11} den Factor x_1^2 enthält, wird das folgende Beispiel zeigen.

§. 2.

Ich will nun die Richtigkeit der Formel 12) an dem einfachen Beispiele für vier ternäre quadratische Formen bestätigen.

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ f_2 &= b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3 \\ f_3 &= c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + c_{33} x_3^2 + 2 c_{12} x_1 x_2 + 2 c_{13} x_1 x_3 + 2 c_{23} x_2 x_3 \\ f_4 &= d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2 + d_{33} x_3^2 + 2 d_{12} x_1 x_2 + 2 d_{13} x_1 x_3 + 2 d_{23} x_2 x_3, \end{aligned}$$

so ist z. B.

$$\begin{aligned} J_{234} = \; & x_1^3 (b_{11} c_{12} d_{13}) + x_2^3 (b_{12} c_{22} d_{23}) + x_3^3 (b_{13} c_{23} d_{33}) + x_1^2 x_2 \{(b_{11} c_{12} d_{23}) + (b_{11} c_{22} d_{13})\} + \\ & + x_1^2 x_3 \{(b_{11} c_{23} d_{33}) + (b_{11} c_{23} d_{13})\} + x_1 x_2^2 \{(b_{11} c_{22} d_{23}) + (b_{12} c_{22} d_{13})\} + \\ & + x_1 x_3^2 \{(b_{11} c_{23} d_{33}) + (b_{13} c_{12} d_{33})\} + x_2^2 x_3 \{(b_{12} c_{22} d_{33}) + (b_{13} c_{22} d_{23})\} + \\ & + x_2 x_3^2 \{(b_{12} c_{23} d_{33}) + (b_{13} c_{22} d_{33})\} + x_1 x_2 x_3 \{(b_{11} c_{22} d_{33}) + (b_{12} c_{23} d_{13}) + (b_{13} c_{12} d_{23})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \cdot J_{234} = \; & x_1^3 (a_{22} b_{11} c_{12} d_{13}) + x_3^3 (a_{22} b_{13} c_{23} d_{33}) + x_1^2 x_2 (a_{22} b_{11} c_{12} d_{23}) + \\ & + x_1^2 x_3 \{(a_{22} b_{11} c_{12} d_{33}) + (a_{22} b_{11} c_{23} d_{13})\} + x_1 x_3^2 \{(a_{22} b_{11} c_{23} d_{33}) + (a_{22} b_{13} c_{12} d_{33})\} + \\ & + x_2 x_3^2 \{(a_{22} b_{12} c_{23} d_{33}) + x_1 x_2 x_3 \{(a_{22} b_{12} c_{23} d_{13}) + (a_{22} b_{13} c_{12} d_{23})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} \cdot J_{234} = \; & x_1^3 (a_{33} b_{11} c_{12} d_{13}) + x_2^3 (a_{33} b_{12} c_{22} d_{23}) + x_1^2 x_2 \{(a_{33} b_{11} c_{12} d_{13}) + (a_{33} b_{11} c_{22} d_{13})\} + \\ & + x_1^2 x_3 (a_{33} b_{11} c_{23} d_{13}) + x_1 x_2^2 \{(a_{33} b_{11} c_{22} d_{23}) + (a_{33} b_{12} c_{22} d_{13})\} + \\ & + x_2^2 x_3 (a_{33} b_{13} c_{22} d_{23}) + x_1 x_2 x_3 \{(a_{33} b_{12} c_{23} d_{13}) + (a_{33} b_{13} c_{12} d_{23})\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\, \partial x_3} \cdot J_{234} = x_1^3(a_{23}b_{11}c_{12}d_{13}) + x_1^2 x_2(a_{23}b_{11}c_{22}d_{13}) + x_1^2 x_3(a_{23}b_{11}c_{12}d_{33}) +$$
$$+ x_1 x_2^2(a_{23}b_{12}c_{22}d_{13}) + x_1 x_3^2(a_{23}b_{13}c_{12}d_{33}) + x_2^2 x_3(a_{23}b_{12}c_{22}d_{33}) +$$
$$+ x_2 x_3^2(a_{23}b_{13}c_{22}d_{33}) + x_1 x_2 x_3(a_{23}b_{11}c_{22}d_{33}).$$

Es wird wohl genügen, anstatt die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2}\varphi_k & \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_k \\ \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_k & \sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_3^2}\varphi_k \end{vmatrix}$$

zu untersuchen, den einfachen Ausdruck

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} J_{234} \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} J_{234} - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\, \partial x_3} J_{234}\right)^2$$

in Betracht zu ziehen. Die Entwickelung dieses Ausdruckes zeigt zunächst, dass derselbe den Factor x_1^2 enthält, d. h., dass alle Glieder, in denen x_1^2 nicht als Factor auftritt, verschwinden müssen. So ist z. B. der Coëfficient von $x_2^3 x_3^3$

$$\Sigma \pm a_{22}b_{13}c_{23}d_{33} \cdot \Sigma \pm a_{33}b_{12}c_{22}d_{23} + \Sigma \pm a_{22}b_{12}c_{23}d_{33} \cdot \Sigma \pm a_{33}b_{13}c_{22}d_{23} - 2\Sigma \pm a_{23}b_{12}c_{22}d_{33} \cdot \Sigma \pm a_{23}b_{13}c_{22}d_{33} = 0,$$

der Coëfficient von $x_2^4 x_3^2$

$$\Sigma \pm a_{33}b_{12}c_{22}d_{23} \cdot \Sigma \pm a_{22}b_{12}c_{23}d_{33} - (\Sigma \pm a_{23}b_{12}c_{22}d_{33})^2 = 0,$$

der Coëfficient von $x_2^2 x_3^4$

$$\Sigma \pm a_{22}b_{13}c_{23}d_{33} \cdot \Sigma \pm a_{33}b_{13}c_{22}d_{23} - (\Sigma \pm a_{23}b_{13}c_{22}d_{33})^2 = 0$$

u. s. w.

Da in der Entwickelung folgenden Ausdruckes

$$\sum \left\{ \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2}\varphi_k \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_3^2}\varphi_k - \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\right)^2 \right\}$$

aus demselben Grunde die Coëfficienten verschwinden müssen, welche x_1^2 nicht zum Factor haben, so folgt offenbar, dass dies auch der Fall ist bei Ausdrücken von folgendem Typus:

$$\sum \left\{ \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2}\varphi_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_3^2}\varphi_i - \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_i \right\}.$$

Um schliesslich die Identität

$$13)\qquad J(J_{234}, J_{314}, J_{124}) = -\begin{vmatrix} \frac{1}{6}\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2}\varphi_k & \frac{1}{6}\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_k \\ \frac{1}{6}\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2\, \partial x_3}\varphi_k & \frac{1}{6}\sum \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_3^2}\varphi_k \end{vmatrix} \cdot f_4$$

nachzuweisen, genügt es, nach den Grundsätzen der Invarianten-Theorie zu zeigen, dass ihre ersten Glieder übereinstimmen. Das erste Glied der linken Seite ist

$$14)\qquad \begin{vmatrix} \Sigma b_{11}c_{12}d_{13}, & \Sigma b_{11}c_{12}d_{23} + \Sigma b_{11}c_{22}d_{13}, & \Sigma b_{11}c_{12}d_{33} + \Sigma b_{11}c_{23}d_{13} \\ \Sigma c_{11}a_{12}d_{13}, & \Sigma c_{11}a_{12}d_{23} + \Sigma c_{11}a_{22}d_{13}, & \Sigma c_{11}a_{12}d_{33} + \Sigma c_{11}a_{23}d_{13} \\ \Sigma a_{11}b_{12}d_{13}, & \Sigma a_{11}b_{12}d_{23} + \Sigma a_{11}b_{22}d_{13}, & \Sigma a_{11}b_{12}d_{33} + \Sigma a_{11}b_{23}d_{13} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{23}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{33} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{23}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{33} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{23}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{23}, & \Sigma b_{11} c_{23} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{23}, & \Sigma c_{11} a_{23} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{23}, & \Sigma a_{11} b_{23} d_{13} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{22} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{33} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{22} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{33} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{22} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{22} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{23} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{22} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{23} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{22} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{23} d_{13} \end{vmatrix}.$$

Die erste und vierte Determinante dieser Summe verschwinden; denn entwickelt man dieselben, nachdem man die Elemente derselben nach den Unterdeterminanten entwickelt hat, so bekommt man Determinanten, deren Elemente der Einheit proportional sind. Was nun die zweite Determinante anlangt, so sieht man leicht ein, dass dieselbe die Unterdeterminante der Reciproken folgender Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{23} b_{23} c_{23} d_{23} \\ a_{11} b_{11} c_{11} d_{11} \\ a_{12} b_{12} c_{12} d_{12} \\ a_{13} b_{13} c_{13} d_{13} \end{vmatrix}$$

und zwar der Coëfficient desjenigen Elementes ist, welches als Coëfficient von d_{11} in dieser Determinante vorkommt. Nach einem bekannten Satze ist daher die zweite Determinante gleich

$$d_{11} (\Sigma \pm a_{23} b_{11} c_{12} d_{13})^2.$$

Um schliesslich die dritte Determinante auszuwerthen, bilde man folgendes Product:

$$\text{15)} \quad \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{22}, & \Sigma b_{11} c_{22} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{22}, & \Sigma c_{11} a_{22} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{22}, & \Sigma a_{11} b_{22} d_{13} \end{vmatrix} \times \begin{matrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{33}, & \Sigma b_{11} c_{33} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{33}, & \Sigma c_{11} a_{33} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{33}, & \Sigma a_{11} b_{33} d_{13} \end{matrix}.$$

Dieses Product ist, da die Factoren Minoren der Determinanten

$$D_1 = \Sigma \pm a_{22} b_{11} c_{12} d_{13}$$
$$D_2 = \Sigma \pm a_{33} b_{11} c_{12} d_{13}$$

sind,

$$\text{16)} \quad = d_{11}^2 . D_1^2 . D_2^2.$$

Das Product 15) lässt sich aber in folgender Weise darstellen:

$$\begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{33}, & \Sigma b_{11} c_{22} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{33}, & \Sigma c_{11} a_{22} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{33}, & \Sigma a_{11} b_{22} d_{13} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{22}, & \Sigma b_{11} c_{33} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{22}; & \Sigma c_{11} a_{33} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{22}, & \Sigma a_{11} b_{33} d_{13} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{33} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{22} d_{13} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{33} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{22} d_{13} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{33} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{22} d_{13} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Sigma b_{11} c_{12} d_{13}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{33}, & \Sigma b_{11} c_{12} d_{22} \\ \Sigma c_{11} a_{12} d_{13}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{33}, & \Sigma c_{11} a_{12} d_{22} \\ \Sigma a_{11} b_{12} d_{13}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{33}, & \Sigma a_{11} b_{12} d_{22} \end{vmatrix}$$

Der zweite Summand verschwindet offenbar wegen des zweiten Factors und es ist daher der erste Summand gleich

$$d_{11}^2 . D_1^2 . D_2^2.$$

Eine kleine Überlegung lehrt, dass jeder einzelne Factor gleich sein muss

$$d_{11} . D_1 . D_2.$$

Und da die Determinante rechts in dem Producte aus der dritten Determinante in 14) durch Vertauschung der Colonnen entsteht, so erhalten wir endlich den Coëfficienten von x_1^6 in

$$J(J_{234}, J_{314}, J_{124})$$

in der Form

$$d_{11}\{(\Sigma\pm a_{23}b_{11}c_{12}d_{13})^2-(\Sigma\pm a_{22}b_{11}c_{12}d_{13})(\Sigma\pm a_{33}b_{11}c_{12}d_{13})\}.$$

Denselben Coëfficienten von x_1^6 treffen wir aber auch in dem Producte

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6}\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \frac{1}{6}\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} \\ \frac{1}{6}\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} & \frac{1}{6}\sum\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} \end{vmatrix}\cdot f_4,$$

wodurch wir also unsere Behauptung bestätigt finden.

§. 3.

Clebsch schon bringt in seiner ersten Abhandlung die Combinante M für vier quadratische Formen mit drei Veränderlichen mit Formen, die er in der Theorie der Steiner'schen Fläche [1] gegeben hat, in Verbindung, indem er mit Hilfe dieser die Combinante M für diesen speciellen Fall ermittelt. Da mir dieser Zusammenhang viel tiefer zu liegen scheint, denn der in Rede stehende Satz von Clebsch leistet auch seinerseits gute Dienste in der Theorie der Steiner'schen Fläche, so will ich auf diese etwas näher eingehen. Man erhält nach Clebsch die Gleichung desjenigen zerfallenden Kegelschnittes der Gruppe $(abcd)$, welche in x seinen Doppelpunkt hat, oder indem man x willkürlich lässt, die Gesammtheit der zerfallenden Kegelschnitte der Gruppe $(abcd)$ in der Form:

17)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & f_1(yy) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & f_2(yy) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & f_3(yy) \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & f_4(yy) \end{vmatrix}$$

$$= a_y^2 A_x^3+b_y^2 B_x^3+c_y^2 C_x^3+d_y^2 D_x^3 = 0.$$

Ein solches Geradenpaar, welches den Punkt x zum Doppelpunkte hat, ist das Paar der von x an folgenden Curve gehende Tangente:

---

[1] Über die Steiner'sche Fläche, Crelle's Journal, Bd. 67, S. 1.

$$18)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} & 2u_1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} & 0 & 2u_2 & 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_3^2} & 0 & 0 & 2u_3 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2 \partial x_3} & 0 & u_3 & u_2 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_3} & u_3 & 0 & u_1 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} & u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$= u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x) = \Sigma A_x(aAu)^2 = \Sigma a_x a_A u_A^2 = 0. \text{ [1]}$$

Das Product der vier Gleichungen der in der Gruppe $(abcd)$ vorkommenden Doppelgeraden findet man in folgender Weise. Wenn x auf einer der Doppelgeraden liegt, so fallen die von x an die Curve 18) gehenden Tangenten in dieselbe Gerade zusammen und x ist auf der Curve gelegen. Man hat also nur nöthig, die letztere in Punktcoordinaten darzustellen und die laufenden Coordinaten mit x gleichzusetzen. Es ist also die Gleichung der vier Geraden in folgender Form gegeben:

$$19)\qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & x_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & x_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = (\rho\rho' x)^2 r_x r'_x = 0,$$

wenn man die Gleichung 18) nach den u ordnet und sie, wie folgt, schreibt:

$$\Sigma\Sigma D_{ik} u_i u_k = 0.$$

Die Identität der Combinante M mit der Form 19) beweist Clebsch, indem er die vier ternären Formen in der Gestalt annimmt:

$$f_1 = 2\eta_2\eta_3$$
$$f_2 = 2\eta_3\eta_1$$
$$f_3 = 2\eta_1\eta_2$$
$$f_4 = \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2.$$

Die φ werden dann, bis auf einen gemeinsamen numerischen Factor

$$2\eta_1\eta_2\eta_3 \quad , \qquad \eta_1^3-\eta_2^2\eta_1-\eta_3^2\eta_1$$
$$\eta_2^2- \quad \eta_3^2\eta_3-\eta_1^2\eta_2 , \qquad \eta_3^2-\eta_1^2\eta_3-\eta_2^2\eta_3$$

und M ist, wie eine kleine Rechnung zeigt

$$20)\qquad M = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)(\eta_1+\eta_2-\eta_3)(\eta_1-\eta_2+\eta_3)(-\eta_1+\eta_2+\eta_3).$$

Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, gibt das Vierseit in der Abbildung der Steiner'schen Fläche, in welches die Abbildung der Wendecurve sich auflöst. Aus dieser Ableitung ist die algebraische Nothwendig-

---

[1] Siehe die Formeln 13 und 31 bei Clebsch, Bd. 67 von Crelle's Journal; ferner die Formeln 45 und 49 bei Rosanes, Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 295 und 297.

keit, dass der Ausdruck 19) in vier lineare Factoren zerfällt, nicht ersichtlich, und nur aus der Einsicht zu erschliessen, dass der Ort der Punkte, deren zugehörende Gerade zusammenfallen, die vier Doppelgeraden der Gruppe $(abcd)$ sein müssen. Es ist ferner selbst bei ternären Formen die Identität von 19) mit M nur unter Zugrundelegung von speciellen Formen auf diese Weise zu beweisen, und um so weniger ist daraus die allgemeine fundamentale Eigenschaft von M, in Factoren zu zerfallen, zu ersehen. Mit Hilfe des in Rede stehenden Satzes von Clebsch in Verbindung mit einigen Sätzen des Herrn Rosanes in seiner schon citirten Arbeit[1] „Über Systeme von Kegelschnitten" gelingt es, in diese Fragen tiefer einzudringen. Da nämlich die vier Jacobi'schen Curven durch dieselben sechs Punkte gehen, so müssen nach einem bekannten Satze die Jacobi'schen Curven dieser Curven diese sechs Punkte zu Doppelpunkten haben; da ferner diese Curven in die vier Kegelschnitte und eine Curve vierter Ordnung $M=0$ zerfallen, so muss, da die Doppelpunkte nicht die Durchschnittspunkte der Kegelschnitte mit der Curve M sein können, weil sonst folgen würde, dass die vier Kegelschnitte durch dieselben Punkte gehen, was bei der Allgemeinheit, in der die Kegelschnitte vorausgesetzt wurden, nicht der Fall ist, und da ferner $M=0$ als Curve vierter Ordnung nur drei Doppelpunkte haben kann, M in vier Factoren zerfallen, und zwar stellen diese Factoren vier Geraden derart dar, dass sie drei Punktpaare verbinden, d. h. die Seiten eines vollständigen Vierseits sind. Um nun das Agregat dieser Geraden zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Aus der Gleichung 17) folgt, dass die Discriminante

$$21)\quad \begin{vmatrix} a_{11}A_x^3+b_{11}B_x^3+c_{11}C_x^3+d_{11}D_x^3, & a_{12}A_x^3+b_{12}B_x^3+c_{12}C_x^3+d_{12}D_x^3, & a_{13}A_x^3+b_{13}B_x^3+c_{13}C_x^3+d_{13}D_x^3 \\ a_{21}A_x^3+b_{21}B_x^3+c_{21}C_x^3+d_{21}D_x^3, & a_{22}A_x^3+b_{22}B_x^3+c_{22}C_x^3+d_{22}D_x^3, & a_{23}A_x^3+b_{23}B_x^3+c_{23}C_x^3+d_{23}D_x^3 \\ a_{31}A_x^3+b_{31}B_x^3+c_{31}C_x^3+d_{31}D_x^3, & a_{32}A_x^3+b_{32}B_x^3+c_{32}C_x^3+d_{32}D_x^3, & a_{33}A_x^3+b_{33}B_x^3+c_{33}C_x^3+d_{33}D_x^3 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet. Für diejenigen Punkte x, deren entsprechende Geraden zusammenfallen, müssen offenbar auch die Subdeterminanten dieser Discriminante verschwinden, diese stellen also vier Doppellinien dar. Und da in der Gruppe $(abcd)$ nur vier solche vorhanden sind, nämlich die Verbindungslinien der drei conjugirten Punktpaare, so folgt von Neuem unsere Behauptung im §. 1.

§. 4.

Nach einem Satze von Rosanes[2] stellt auch

$$a_y^2 u_A^3 + b_y^2 u_B^3 + c_y^2 u_\Gamma^3 + d_y^2 u_\Delta^3 = 0,$$

wo

$$u_A^3 = -(bcu)(bdu)(cdu), \quad u_B^3 = (acu)(adu)(cdu)$$
$$u_\Gamma^3 = -(abu)(adu)(bdu), \quad u_\Delta^3 = (abu)(acu)(bcu)$$

die Hermite'schen Formen bedeuten, einen zerfallenden Kegelschnitt dar, folglich verschwindet auch die Discriminante

$$22)\quad \begin{vmatrix} a_{11}u_A^3+b_{11}u_B^3+c_{11}u_\Gamma^3+d_{11}u_\Delta^3, & a_{12}u_A^3+b_{12}u_B^3+c_{12}u_\Gamma^3+d_{12}u_\Delta^3, & a_{13}u_A^3+b_{13}u_B^3+c_{13}u_\Gamma^3+d_{13}u_\Delta^3 \\ a_{21}u_A^3+b_{21}u_B^3+c_{21}u_\Gamma^3+d_{21}u_\Delta^3, & a_{22}u_A^3+b_{22}u_B^3+c_{22}u_\Gamma^3+d_{22}u_\Delta^3, & a_{23}u_A^3+b_{23}u_B^3+c_{23}u_\Gamma^3+d_{23}u_\Delta^3 \\ a_{31}u_A^3+b_{31}u_B^3+c_{31}u_\Gamma^3+d_{31}u_\Delta^3, & a_{32}u_A^3+b_{32}u_B^3+c_{32}u_\Gamma^3+d_{32}u_\Delta^3, & a_{33}u_A^3+b_{33}u_B^3+c_{33}u_\Gamma^3+d_{33}u_\Delta^3 \end{vmatrix}.$$

die Bedingung, dass die zwei Geraden in eine zusammenfallen, d. h., dass der Kegelschnitt in eine Doppellinie ausartet, wird offenbar durch das Verschwinden der Unterdeterminanten von 22) ausgedrückt. Eine solche Unterdeterminante gleich Null gesetzt, stellt augenscheinlich sechs Punkte dar; die eben erwähnte Bedingung stellt daher das Verlangen, dass die vier Doppellinien durch diese sechs Punkte gehen sollen.

[1] Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 265 ff.

[2] Mathem. Annalen, Bd. 6, S. 303

Nun gilt nach Rosanes [1] folgender Satz:

„Die vier Hermite'schen Formen

$$u_A^3, \quad u_B^3, \quad u_\Gamma^3, \quad u_\Delta^3$$

gehen aus den vier Jacobi'schen

$$A_x^3, \quad B_x^3, \quad C_x^3, \quad D_x^3$$

durch die Transformationsgleichungen

23)
$$\begin{aligned} x_1 &= \Sigma (Au)_1 (aAu)^2 \\ x_2 &= \Sigma (Au)_2 (aAu)^2 \\ x_3 &= \Sigma (Au)_3 (aAu)^2 \end{aligned}$$

hervor, während ein Factor vom sechsten Grade in u heraustritt, der, gleich Null gesetzt, die drei conjugirten Punktpaare darstellt."

Es entsteht daher, wie schon Herr Rosanes bemerkt 22) aus 21) durch die Substitutionen 23) und wir können ohne Weiteres die Bedingungen, welche durch das Verschwinden der Subdeterminanten von 22) ausgedrückt sind, aus den Bedingungsgleichungen, welche durch das Verschwinden der Subdeterminanten von 21) ausgedrückt sind, durch diese Substitutionen entstehen lassen. Das Product der vier Geraden geht daher offenbar in das Quadrat des Productes der sechs Punkte über und wir haben daher eine fundamentale Eigenschaft der Combinante M, welche sich in folgendem Satze ausspricht.

Satz:

Die Combinante M hat die Eigenschaft, durch die Substitutionen 23) in ein Quadrat überzugehen.

Bei weitem wichtiger ist unsere Ableitung der vier Doppelgeraden desshalb, weil man aus ihr, wie gezeigt wurde, das Product der sechs Punkte leicht herstellen kann, und noch mehr desshalb, weil man aus ihr die allgemeine Eigenschaft von M, in Factoren zu zerfallen, erkennt.

§. 5.

Wir kommen jetzt zu den Sätzen, die sich als Analoga zu dem Satze von Clebsch repräsentiren, und welche ich als Verallgemeinerung von gewöhnlichen Determinanten-Sätzen betrachten zu können glaube. Es ist in dieser Hinsicht zuerst der Satz des Herrn Rosanes [2] zu nennen, den er in folgender Weise ausspricht:

„Werden drei Formen mit f_1, f_2, f_3, die Variabeln mit x_1, x_2 bezeichnet und die Ableitungen durch obere Indices unterschieden, so dass

$$f_\rho^\sigma = \frac{\partial f_\rho}{\partial x_\sigma}, \quad f_\rho^{\sigma\tau} = \frac{\partial^2 f_\rho}{\partial x_\sigma \partial x_\tau},$$

u. s. w., so hat die Determinante die Form

$$\begin{vmatrix} f_1^{11} f_2^{11} f_3^{11} \\ f_1^{12} f_2^{12} f_3^{12} \\ f_1^{22} f_2^{22} f_3^{22} \end{vmatrix}.$$

Wenn nun vier Formen $n$ten Grades f_1, f_2, f_3, f_4 gegeben sind, so kann man hiernach aus ihnen vier neue bilden, welche bei passender Zeichenwahl $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ heissen mögen. Durch denselben Process, durch welchen die φ aus den f entstanden sind, bilde man vier neue Formen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ aus den φ_i, dann ist

$$\psi_1 = M.f_1, \quad \psi_2 = M.f_2, \quad \psi_3 = M.f_3, \quad \psi_4 = M.f_4."$$

---

[1] L. c. S. 300.

[2] Crelle's Journal, Bd. 75, S. 166—171.

Für M findet Rosanes den Ausdruck

24) $$M = \begin{vmatrix} f_1^{111} & f_2^{111} & f_3^{111} & f_4^{111} \\ f_1^{112} & f_2^{112} & f_3^{112} & f_4^{112} \\ f_1^{122} & f_2^{122} & f_3^{122} & f_4^{122} \\ f_1^{222} & f_2^{222} & f_3^{222} & f_4^{222} \end{vmatrix}$$

Dieser Satz kann, wie schon Rosanes bemerkt, auf beliebig viele Formen ausgedehnt werden, und dieser Verallgemeinerung hat Pasch folgende Fassung gegeben:

„Sind $f_1, f_2, \ldots f_\lambda$ λ binäre Formen und setzt man, wenn man sich der Bezeichnung bedient:

$$\mathfrak{D}(f_1 f_2 \ldots f_\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_2^{\lambda-1}} & \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_2^{\lambda-2}\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_1}{\partial x_1^{\lambda-1}} \\ \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_2^{\lambda-1}} & \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_2^{\lambda-2}\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_2}{\partial x_1^{\lambda-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_2^{\lambda-1}} & \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_2^{\lambda-2}\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x_1^{\lambda-1}} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{\lambda+k}\mathfrak{D}(f_1 \ldots f_{k-1} f_{k+1} \ldots f_\lambda) = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \lambda,$$

so ist

25) $$\mathfrak{D}(\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1} \varphi_{i+1} \ldots \varphi_\lambda) = (-1)^{i-1} f_i \cdot \mathfrak{D}(f_1 f_2 \ldots f_\lambda)^{\lambda-2}.\text{“}$$

Berücksichtigt man die Identität

$$m(m-1)^2(m-2)^3 \ldots (m-\lambda+2)^{\lambda-1} D(f_1 f_2 \ldots f_\lambda) = x_2^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} \mathfrak{D}(f_1, f_2 \ldots f_\lambda)$$ [1]

wo

26) $$D(f_1 f_2 \ldots f_\lambda) = \Sigma \pm f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} \ldots \frac{\partial^{\lambda-1} f_\lambda}{\partial x^{\lambda-1}}$$

und m den Grad der Functionen bedeutet, so stellt sich dieser Satz als einfache Erweiterung des folgenden bekannten Determinanten-Satzes heraus:

„Die partiale Determinante $(\lambda-1)$ten Grades des adjungirten Systems von $D(f_1, f_2 \ldots f_\lambda)$ ist das Product von $D^{\lambda-2}$ mit dem Coëfficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems hat.“

Es ist nur zu zeigen, dass, wenngleich die Differentialquotienten der φ keineswegs die Minoren von $D(f_1, f_2 \ldots f_\lambda)$ darstellen, die Determinante $D(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1} \ldots \varphi_\lambda)$ dennoch nur der Minor der Reciproken von $D(f_1, f_2 \ldots f_\lambda)$ ist. Um nicht weitläufig zu sein, wird es genügen, wenn wir dies an einem einfachen Beispiele zeigen. Bilden wir nämlich für vier Functionen die Determinante

$$D(f_1 f_2 f_3 f_4) = \Sigma \pm f_1 f_2' f_3'' f_4'''$$

und von dieser die vier Unterdeterminanten:

$$\varphi_4 = \Sigma \pm f_1 f_2' f_3''$$
$$\varphi_3 = \Sigma \pm f_1 f_2' f_4''$$
$$\varphi_2 = \Sigma \pm f_1 f_3' f_4''$$
$$\varphi_1 = \Sigma \pm f_2 f_3' f_4'',$$

[1] Crelle's Journal. Bd. 80, S. 177—182.

so ist z. B., da

$$\begin{aligned}\varphi_4' &= \Sigma \pm f_1 f_2' f_3''' \\ \varphi_3' &= \Sigma \pm f_1 f_2' f_4''' \\ \varphi_2' &= \Sigma \pm f_1 f_3' f_4''' \\ \varphi_1' &= \Sigma \pm f_2 f_3' f_4'''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4'' &= \Sigma \pm f_1 f_2'' f_3''' + \Sigma \pm f_1 f_2' f_3^{\mathrm{IV}} \\ \varphi_3'' &= \Sigma \pm f_1 f_2'' f_4''' + \Sigma \pm f_1 f_2' f_4^{\mathrm{IV}} \\ \varphi_2'' &= \Sigma \pm f_1 f_3'' f_4''' + \Sigma \pm f_1 f_3' f_4^{\mathrm{IV}} \\ \varphi_1'' &= \Sigma \pm f_2 f_3'' f_4''' + \Sigma \pm f_2 f_3' f_4^{\mathrm{IV}}\end{aligned}$$

ist

$$27)\quad D(\varphi_4 \varphi_3 \varphi_2) = \Sigma \pm \varphi_4 \varphi_3' \varphi_2'' = \begin{vmatrix} \Sigma \pm f_1 f_2' f_3'' & \Sigma \pm f_1 f_2' f_4'' & \Sigma \pm f_1 f_3' f_4'' \\ \Sigma \pm f_1 f_2' f_3''' & \Sigma \pm f_1 f_2' f_4''' & \Sigma \pm f_1 f_3' f_4''' \\ \Sigma \pm f_1 f_2' f_3^{\mathrm{IV}} & \Sigma \pm f_1 f_2' f_4^{\mathrm{IV}} & \Sigma \pm f_1 f_3' f_4^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \Sigma \pm f_1 f_2' f_3'' & \Sigma \pm f_1 f_2' f_4'' & \Sigma \pm f_1 f_3' f_4'' \\ \Sigma \pm f_1 f_2' f_3''' & \Sigma \pm f_1 f_2' f_4''' & \Sigma \pm f_1 f_3' f_4'' \\ \Sigma \pm f_1 f_2'' f_3''' & \Sigma \pm f_1 f_2'' f_4''' & \Sigma \pm f_1 f_3'' f_4''' \end{vmatrix}.$$

Von der ersten dieser Determinanten überzeugt man sich leicht, dass sie identisch verschwindet, und was die zweite anlangt, so übersieht man eben so leicht, dass sie der Coëfficient desjenigen Elementes in der Reciproken von $D(f_1, f_2 \ldots f_\lambda)$ ist, welchem in dieser das Element f_1 entspricht. Man erhält daher

$$28)\quad D(\varphi_4 \varphi_3 \varphi_2) = f_1 \cdot D(f_1 f_2 f_3 f_4)^2.$$

Geht man jetzt zu homogenen Formen über, so erhält man in Folge der obigen Identität:

$$29)\quad \begin{aligned}\mathfrak{D}(\varphi_4 \varphi_3 \varphi_2) &= \mu \cdot f_1 \; \mathfrak{D}(f_1 f_2 f_3 f_4)^2 \\ \mathfrak{D}(\varphi_4 \varphi_2 \varphi_1) &= \mu \cdot f_3 \; \mathfrak{D}(f_1 f_2 f_3 f_4)^2 \\ \mathfrak{D}(\varphi_4 \varphi_3 \varphi_1) &= \mu \cdot f_2 \; \mathfrak{D}(f_1 f_2 f_3 f_4)^2 \\ \mathfrak{D}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) &= \mu \cdot f_4 \; \mathfrak{D}(f_1 f_2 f_3 f_4)^2,\end{aligned}$$

wenn unter μ ein numerischer Factor verstanden wird.

Es ist selbstverständlich, dass der allgemeinere Satz von Frobenius,[1] welcher lautet:

> „Sind $f_1 \ldots f_\lambda$ Functionen von x, so ist
>
> $$30)\quad D(\varphi_{\beta_1} \ldots \varphi_{\beta_k}) = \xi D(f_1 \ldots f_{\alpha_{\lambda-k}}) \, D(f_1 \cdot f_2 \ldots f_\lambda)^{k-1},$$
>
> wo $\alpha_1 \ldots \alpha_{\lambda-k} \cdot \beta_1 \ldots \beta_k$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots \lambda$ bedeutet und $\xi = \pm$ ist, je nachdem die Permutation zur ersten oder zur zweiten Classe gehört“

ebenfalls nichts Anderes als der bekannte Determinanten-Satz ist:

> „Eine partiale Determinante des adjungirten Systems vom $k$ten Grade ist das Product von D^{k-1} mit dem Coëfficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in D hat.“

Auch hier möge ein einfaches Beispiel genügen. Bilden wir aus fünf Functionen die Determinante

$$D(f_1 f_2 \ldots f_5) = \Sigma \pm f_1 f_2' f_3'' f_4''' f_5^{\mathrm{IV}}$$

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 77, S. 247 und 251.

und aus dieser die Minoren

$$\varphi_5 = \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_4, \quad \varphi_4 = \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_5$$
$$\varphi_3 = \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f'''_5, \quad \varphi_2 = \Sigma \pm f_1 f'_3 t''_4 f'''_5$$
$$\varphi_1 = \Sigma \pm f_2 f'_3 f''_4 f'''_5,$$

so ist z. B.

31) $$D(\varphi_5 \varphi_4 \varphi_3) = \Sigma \pm \varphi_5 \varphi'_4 \varphi''_3 = \begin{vmatrix} \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f'''_5 \\ \Sigma \pm f_1 f'_2 f'_3 f^{IV}_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f^{IV}_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f^{IV}_5 \\ \Sigma \pm f_1 f'_2 f'''_3 f^{IV}_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f'''_3 f^{IV}_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f'''_4 f^{IV}_5 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f'''_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f'''_5 \\ \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f^{IV}_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f^{IV}_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f^{IV}_5 \\ \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f^{V}_4 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_3 f^{V}_5 & \Sigma \pm f_1 f'_2 f''_4 f^{V}_5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} f_1 f_2 \\ f'_1 f'_2 \end{vmatrix} D(f_1 f_2 f_3 f_4 f_5)^2.$$

Der sehr umfassende Satz des Herrn **Frobenius**[1], der folgendermassen ausgesprochen wird:

„Sind $f_1 \ldots f_{\lambda+\mu}$ Functionen von x und setzt man

$$D(f_1 f_2 \ldots f_{\lambda-1} f_{\lambda+\alpha}) = \psi_\alpha \qquad \alpha = 0, \quad 1 \ldots \mu,$$

so ist

32) $$D(\psi_0, \quad \psi_1 \ldots \psi_\mu) = D(f_1 \cdot f_2 \ldots f_{\lambda-1})^\mu \cdot D(f_1 f_2 \ldots f_{\lambda+\mu}),\text{“}$$

hat, so viel bekannt ist, kein Analogon in der Determinantentheorie. Man kann aber ein solches ableiten durch folgende Überlegung. Nach dem oben Gesagten ist $D(\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_\mu)$ nichts Anderes als ein Minor der Reciproken von $D(f_1, f_2 \ldots f_{\lambda+\mu})$, dessen Elemente auf folgende Weise gebildet sind.

Aus dem Element ψ_0, welches eine Unterdeterminante λten Grades von $D(f_1, f_2 \ldots f_{\lambda+\mu})$ ist, bildet man alle Elemente der ersten Reihe, indem man die letzte Colonne successive durch $f_{\lambda+1}$ und ihre Ableitungen $f_{\lambda+2}$ ersetzt; aus diesen Elementen bildet man wieder die Elemente der zweiten Reihe, indem man in ihnen die respective letzten Reihen durch die entsprechenden in der $(\lambda+1)$ten Reihe von $D(f_1, f_2 \ldots f_{\lambda+\mu})$; aus diesen Elementen bildet man abermals die Elemente der dritten Reihe, indem man in ihnen die respective vorletzten Reihen durch die ihnen entsprechenden der $(\lambda+2)$ten Reihe in $D(f_1, f_2 \ldots f_{\lambda+\mu})$ ersetzt, u. s. w.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

„Ist ein System von Grössen

$$\text{I)} \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1\lambda} & a_{1\lambda+1} & \ldots a_{1\lambda+\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2\lambda} & a_{2\lambda+1} & \ldots a_{2\lambda+\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda,1} & a_{\lambda 2} & \ldots a_{\lambda\lambda} & a_{\lambda\lambda+1} & \ldots a_{\lambda\lambda+\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda+\mu,1} & a_{\lambda+\mu,2} & \ldots a_{\lambda+\mu,\lambda} & a_{\lambda+\mu\,\lambda+1} & \ldots a_{\lambda+\mu\,\lambda+\mu} \end{matrix} \right.$$

und bildet man folgende Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} M_{11} \, M_{12} \ldots M_{1\lambda} \\ M_{21} \, M_{22} \ldots M_{2\lambda} \\ M_{31} \, M_{32} \ldots M_{3\lambda} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ M_{\lambda 1} \, M_{\lambda 2} \ldots M_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

[1] L. c.

wo

$$M_{11} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\lambda\lambda}$$

$$M_{12} = \Sigma \frac{\partial M_{11}}{\partial a_{i\lambda}} a_{i\lambda+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{1\lambda} = \Sigma \frac{\partial M_{11}}{\partial a_{i\lambda}} a_{i\lambda+\mu}$$

$$M_{21} = \Sigma \frac{\partial M_{11}}{\partial a_{2i}} a_{\lambda+1\, i}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{\lambda 1} = \Sigma \frac{\partial M_{11}}{\partial a_{\lambda i}} a_{\lambda+m i}$$

$$M_{22} = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial a_{i\lambda}\, \partial a_{2k}} a_{\lambda+1 k}\, a_{i\lambda+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{2\lambda} = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial a_{i\lambda}\, \partial a_{2k}} a_{\lambda+1 k}\, a_{\lambda+\mu k}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{\lambda 2} = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial a_{i\lambda}\, \partial a_{2k}} a_{\lambda+1 k}\, a_{\lambda+\mu k}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$M_{\lambda\lambda} = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial a_{i\lambda}\, \partial a_{\lambda k}} a_{\lambda+1 k}\, a_{\lambda+\mu k}$$

so ist

33) $$D = (\Sigma a_{11} a_{22} \ldots a_{\lambda-1\, \lambda-1})^{\mu} \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\lambda+\mu\, \lambda+\mu}.$$

Diesem Satze ähnlich, aber leichter zu beweisen, ist der Satz des Herrn Hamburger (Crelle's Journal, Bd. 100, S. 390), wenn man ihm folgende Fassung gibt:

Aus dem Systeme I) bilde man durch Combination von beliebigen λ Colonnen der ersten λ Zeilen die Determinante λten Grades

$$M_{i_1, i_2, i_3 \ldots i_p} = \begin{vmatrix} a_{1 i_1} & a_{1 i_2} & \ldots a_{1 i_p} \\ a_{2 i_1} & a_{2 i_2} & \ldots a_{2 i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\lambda i_1} & a_{\lambda i_2} & \ldots a_{\lambda i_\lambda} \end{vmatrix}$$

wo $i_1, i_2, \ldots i_\lambda$ λ Zahlen aus der Reihe $1, 2 \ldots \lambda+\mu$ bedeuten. Führt man ferner zur Abkürzung

$$M = M_{1\,2 \ldots \lambda} \quad M_{k\,i} = M_{1\,2 \ldots k-1\, i\, k+1 \ldots \lambda} \quad k = 1, 2, \ldots \lambda+\mu$$

ein, so dass

$$M_{kk} = M \quad \text{und} \quad M_{k\,i} = 0$$

ist, wenn $i < \lambda+1$ und k von i verschieden ist, dann ist unter der Voraussetzung, dass M von Null verschieden ist,

34) $$M_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \cdot M^{\lambda-1} = \begin{vmatrix} M_{1 i_1} & M_{1 i_2} & \ldots M_{1 i_\lambda} \\ M_{2 i_1} & M_{2 i_2} & \ldots M_{2 i_\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{\lambda i_1} & M_{\lambda i_2} & \ldots M_{\lambda i_\lambda} \end{vmatrix}.$$

§. 6.

Der im vorigen Paragraph citirte Satz ist, wie schon Rosanes selbst bemerkt, sowohl in Bezug auf die Anzahl der Variabeln, als auch in Bezug auf den Grad der Ableitungen der Erweiterung fähig. In der That hat Pasch in der schon citirten Arbeit diese Erweiterung gegeben. Setzt man nämlich

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} + \ldots = \delta f, \quad \delta(\delta f) = \delta^2 f, \quad \delta(\delta^2 f) = \delta^3 f$$

und

$$D(f_1 f_2 \ldots f_\lambda) = \Sigma \pm f_1 . \delta f_2 . \delta^2 f_3 \ldots \delta^{\lambda-1} f_\lambda$$

wo $y_1, y_2 \ldots$ willkürliche Grössen bedeuten, so lautet der allgemeinere Satz nach Pasch

35) $$D(\varphi_{\beta_1} \varphi_{\beta_2} \ldots \varphi_{\beta_k}) = \varepsilon D(f\alpha_1 \ldots f\alpha_{\lambda-k}) . D(f_1 . f_2 \ldots f_\lambda)^{k-1}.$$

Wenn $k = \lambda - 1$ ist, so geht diese Gleichung in

36) $$D(\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1} \varphi_{i+1} \ldots \varphi_\lambda) = (-1)^{i-1} f_i . D(f_1 \ldots f_\lambda)^{\lambda-2}$$

über, und diese Gleichung ist die Verallgemeinerung des Satzes von Rosanes. Setzt man

37) $$D(f_1 \ldots f_\lambda) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_\lambda \\ \delta f_1 & \delta f_2 & \ldots & \delta f_\lambda \\ \delta^2 f_1 & \delta^2 f_2 & \ldots & \delta^2 f_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{\lambda-1} f_1 & \delta^{\lambda-1} f_2 & \ldots & \delta^{\lambda-1} f_\lambda \end{vmatrix} = L$$

und adjungirt die Gleichungen:

38) $$F(x_1 x_2 x_3) = 0, \; \delta F(x_1 \ldots) = 0 \ldots, \; \delta^{\lambda-1} F(x_1 \ldots) = 0,$$

so stellt bekanntlich $L = 0$ die Coïncidenzcurve des Büschels

39) $$f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_\lambda f_\lambda = 0$$

dar, d. h., die Curve, welche durch die $(\lambda-1)$fachen Berührungspunkte der Curven dieser Schaar mit der Curve $F(x_1 \ldots) = 0$ geht. Bildet man die λ Unterdeterminanten von L, genommen nach den Elementen der letzten Reihe und bezeichnet allgemein

$$\varphi_i = \begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_{i-1} & f_{i+1} & \ldots & f_\lambda \\ \delta f_1 & \ldots & \delta f_{i-1} & \delta f_{i+1} & \ldots & \delta f_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{\lambda-2} f_1 & \ldots & \delta^{\lambda-2} f_{i-1} & \delta^{\lambda-2} f_{i+1} & \ldots & \delta^{\lambda-2} f_\lambda \end{vmatrix} \quad i = 1, 2 \ldots \lambda,$$

so stellen diese φ gleich Null gesetzt, nach Adjungirung der Gleichungen 38) die Coïncidenzcurven der respective Büschel

40) $$f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_{i-1} f_{i-1} + \alpha_{i+1} f_{i+1} + \ldots + \alpha_\lambda f_\lambda = 0.$$

Die Coïncidenzcurven der λ Büschel

41) $$\varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_{i-1} \varphi_{i-1} + \alpha_{i+1} \varphi_{i+1} + \ldots + \alpha_\lambda \varphi_\lambda = 0$$

sind respective

42) $$\Phi_i = D(\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1} \varphi_{i+1} \ldots \varphi_\lambda) = 0.$$

Adjungirt man in 36) die Gleichungen 38), so erhält man

$$\Phi_i = (-1)^{i-1} f_i L^{\lambda-2},$$

d. h. den Satz:

„Die Coïncidenzcurven der Büschel 41) setzen sich aus den gegebenen Curven und der Coïncidenzcurve des Büschels 39) zusammen.“

Herr Brill,[1] der diesen Satz aufgestellt hat, spricht denselben folgendermassen aus:

„Gruppirt man die λ Curven $f=0$ zu λ Schaaren von je $\lambda-1$ und sucht diejenigen Curven einer solchen Schaar, welche $F(\lambda-2)$punktig berühren, so lässt sich durch die Berührungspunkte eine Curve φ legen, welche ausser in diesen F nur noch in den festen Punkten der f und den singulären Punkten trifft. Jede Schaar liefert so eine Curve φ, welche zusammen wieder eine Schaar von λ Curven bilden. Auf letztere kann man dieselbe Operation, welche man auf die f angewendet hat, abermals anwenden, und die hervorgehenden beweglichen Curven sind dann keine anderen, als die f, von denen man ausging.“

Für $\lambda=3$ ist z. B.

43) $$\varphi_1 = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \partial f_2 & \partial f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix};$$

wenn man die Gleichungen

44) $$F(x_1 x_2 x_3) = 0 \qquad \partial F(x_1 \ldots) = 0$$

adjungirt,

45) $$\varphi_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = (Ff_2f_3).$$

Ebenso ist unter Adjungirung von 44)

$$\varphi_2 = (Ff_1f_2), \quad \varphi_3 = (Ff_3f_1).$$

Bildet man jetzt die Formen

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \partial\varphi_2 & \partial\varphi_3 \end{vmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ \partial\varphi_3 & \partial\varphi_1 \end{vmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \partial\varphi_1 & \partial\varphi_2 \end{vmatrix}$$

und adjungirt wieder die Gleichungen 44), so gehen dieselben über in

46) $$\Phi_1 = (F\varphi_2\varphi_3) \quad \Phi_2 = (F\varphi_3\varphi_1) \quad \Phi_3 = (F\varphi_1\varphi_2)$$

und man erhält demnach unter der Voraussetzung von 44) die Gleichungen nach dem obigen Satze:

47) $$\Phi_1 = \varphi_1 . L \quad \Phi_2 = \varphi_2 . L \quad \Phi_3 = \varphi_3 . L.$$

In diesem Sinne ist wohl auch der Satz des Herrn Brill in der Anmerkung zur citirten Arbeit aufzufassen, denn dass die Formeln 47) keine Identitäten, wie es aus dem Satze in dieser Anmerkung hervorzugehen scheint, sein können, überzeugt man sich auf folgende Weise. Wegen der bekannten Identität:[2]

$$(a\alpha'\alpha'')\alpha_x + (a\alpha\alpha')\alpha''_x + (a\alpha''\alpha)\alpha'_x = (\alpha\alpha'\alpha'')a_x$$

---

[1] Mathem. Annalen, Bd. 4, S. 527.

[2] Siehe Clebsch-Lindemann, S. 456 und 468.

folgen die Identitäten

48)
$$(F\varphi_1\varphi_2)\varphi_3+(F\varphi_2\varphi_3)\varphi_1+(F\varphi_3\varphi_1)\varphi_2=(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)\cdot F$$
$$(Ff_1f_2)f_3+(Ff_2f_3)f_1+(Ff_3f_1)f_2=(f_1f_2f_3)\cdot F.$$

Diese würden unter Benützung von 46) und 47) die Identität liefern

$$(f_1f_2f_3)L=(\varphi_1\varphi_2\varphi_3),$$

was nicht möglich ist, da, wenn man annimmt, dass F mit den f_i von derselben Ordnung ist, nach dem Satze von Clebsch

$$(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)=F.M$$

ist und M seiner Natur nach unmöglich durch (f_1, f_2, f_3) theilbar sein kann.

§. 7.

Zum Schlusse will ich noch einen Satz beweisen, der vielleicht nicht ohne Interesse sein dürfte. Es seien wieder vier quadratische Formen f_1, f_2, f_3, f_4 gegeben und, sowie früher ihre Functionaldeterminanten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 und die aus diesen gebildeten Functionaldeterminanten durch Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 bezeichnet. Es sind bekanntlich

$$\Phi_1=0,\quad \Phi_2=0,\quad \Phi_3=0,\quad \Phi_4=0,$$

beziehungsweise die Örter der Pole, deren gerade Polaren in Bezug auf die respectiven Curven

$$\begin{array}{lll}\varphi_1=0 & \varphi_2=0 & \varphi_3=0\\ \varphi_1=0 & \varphi_2=0 & \varphi_4=0\\ \varphi_1=0 & \varphi_3=0 & \varphi_4=0\\ \varphi_2=0 & \varphi_3=0 & \varphi_4=0\end{array}$$

sich in einem Punkte schneiden. Den Φ entsprechen eindeutig die Steiner'schen Curven als Örter diese Schnittpunkte. Da wir nun wissen, dass die Φ ganz specielle Eigenschaften haben, so liegt es nahe, auch die ihnen eindeutig entsprechenden Curven zu untersuchen. Der Kürze halber bezeichnen wir die Steiner'schen Curven durch S und unterscheiden dieselben durch Indices. Zunächst ist klar, dass auch die S eine der Curve $M=0$ entsprechende allen gemeinschaftliche Curve, die wir mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wollen, enthalten. Die Ordnung dieser Curve ist offenbar, wenn man die Ordnungszahlen von Φ und S berücksichtigt, gleich acht. Die anderen Curven, welche respective den Curven

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0,\quad f_4=0$$

entsprechen, sind demnach von der vierten Ordnung. Diese zwei Systeme von Curven können nicht verschieden sein und einander eindeutig entsprechen, denn es müsste sonst der Schnittpunkt $f_1=0$, $f_2=0$ z. B. da er der Pol ist, dessen geraden Polaren in Bezug aller Curven $\varphi=0$ sich in einem Punkte schneiden, der Schnittpunkt aller vier Curven $f=0$ sein. Würde man, um diesen Widerspruch zu heben, annehmen, dass die Schnittpunkte der $f=0$ auf der Curve $M=0$ liegen, so würde man auf den Widerspruch stossen, dass die Curven $f=0$ mit $M=0$ in mehr als in acht Punkten sich schneiden. Es folgt daher, dass die Curven vierter Ordnung nichts Anderes als die Quadrate der f sind. Wir wollen aber beweisen, dass auch die Form $\mathfrak{M}$ das Quadrat M ist. Zu diesem Behufe recurriren wir auf die charakteristische Eigenschaft von M, in vier Gerade zu zerfallen, welche Doppelgeraden in der viergliedrigen Gruppe sind. Die Natur dieser Geraden bringt es mit sich, dass die ihnen entsprechende Curve $\mathfrak{M}=0$ das Quadrat einer Curve vierter Ordnung sein muss. Da zwei Curven, welche sich gegenseitig eindeutig entsprechen, bekanntlich dasselbe Geschlecht haben, so folgt daraus, dass auch diese Curve vierter Ordnung in vier Geraden zerfallen muss. Wären aber

diese vier Geraden andere als die durch $M = 0$ dargestellten, so würde daraus folgen, dass in der viergliedrigen Gruppe mehr als vier Doppelgeraden sind, was nicht der Fall ist; es muss daher

$$\mathbf{M} = C.M^2$$

sein. Alles zusammengefasst, liefert nun den

Satz:

Die vier Steiner'schen Curven, welche die vier quadratischen Formen liefern, stellen sich folgendermassen dar:

$$S_1 = C.f_1^2.M^2$$
$$S_2 = C.f_2^2.M^2$$
$$S_3 = C.f_3^2.M^2$$
$$S_4 = C.f_4^2.M^2.$$

